Soluție

1.a) $\det\left(A \cdot A^t\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^t\right) = \det^2(A) \geq 0.$

b) $A \cdot A^t = A^t \cdot A \Leftrightarrow ac + bd = ab + cd \Leftrightarrow (a-d)(c-b) = 0$.

c) $A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = (b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Cum $\left(A - A^t\right)^{2008} = (b-c)^{2008} \cdot I_2$, rezultă

$\left(A - A^t\right)^{2009} = (b-c)^{2008} \cdot \left(A - A^t\right) \Rightarrow A - A^t = O_2$ sau $(b-c)^{2008} = 1$. Se obține $b - c \in \{0, 1, -1\}$, deci $|b-c| \in \{0, 1\}$.

2.a) $x = \hat{2}^{-1} \cdot \hat{3} = \hat{5}$.

b) $x^2 \in \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\right\},\ \forall x \in \mathbb{Z}_7$, deci $2x^2 \in \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\right\}$.

c) $f(x+y) = \hat{2}(x+y) = \hat{2}x + \hat{2}y = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Z}_7$. $f(x) = f(y) \Rightarrow \hat{2}x = \hat{2}y \Rightarrow x = y$, deci *f* este injectivă. Cum $\mathbb{Z}_7$ este mulțime finită rezultă că f este surjectivă.